O KSZTAŁCIE i GRAWITACYI

SFEROIDU ZIEMSKIEGO.

NAPISAŁ

Dr. LUDWIK BIRKENMAJER,
docent fizyki matematycznéj w Uniw. Jagiell.

Osobne odbicie z XIV tomu Rozpraw Wydz. matem.-przyr. Akad. Um.

KRAKÓW,
w drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego
pod zarządem tymcz. Bol. Dembowskiego.
1885.

O kształcie i grawitacyi sferoidu ziemskiego,

NAPISAŁ

Dr. Ludwik Birkenmajer,
docent fizyki matematycznéj w Uniw. Jagiell.

WSTĘP.

Obecny stan naukowych zdobyczy w tym kierunku.

Wyznaczenie kształtu i wielkości ziemi jest wspaniałém zadaniem, zaprzątającém umysł człowieka od wieków dwudziestu. Eratosthenes wykonywając nieudolny pomiar części południka od Syeny do Aleksandryi rozpoczyna długi szereg znakomitych mężów i naukowych instytucyj, których imiona zawsze z czcią i wdzięcznością wspominane będą. Z pośród mnóstwa uczonych, którzy swe siły umysłowe i zasoby rozwiązywaniu tego zagadnienia poświęcili, niech wymienimy tylko niektórych: Posidonius, Ptolomeusz, Al Maimon, Fernel, Snellius, Musschenbroek, Norwood, Picard, Huyghens, Newton, lond. Royal Society, Lahire, Cassini, Paryska Akademija Umiejęt., Bouguer, Maupertuis, Clairaut, Lemonnier, Lacaille, Boscovich, Lemaire, Bec-

caria, Delambre, Mechain, Biot i Arago, Gauss, Struve, Bessel i tylu innych. Ale kulminacyjnym punktem wszystkich tych usiłowań ludzkich było utworzenie międzynarodowego Towarzystwa dla geodezyjnego pomiaru Europy w r. 1860 za inicyatywą Excell. generała Baeyera.

Nie można lepiéj zcharakteryzować całéj doniosłości przedsięwzięcia europejskiego pomiaru, jak przytaczając słowa piérwszorzędnego geodety Sir Henry Jamesa F. R. S. powtórzone przez Sir W. Thomsona jednego z koryfeuszów dzisiejszéj wiedzy:

„*It is, in fact a work which could not possible have been executed at any earlier period in the history of the world. The exact determination of the Figure and dimensions of the Earth has been one great aim of astronomers for upwards of two thousand years; and it is fortunate that we live in a time when men are so enlightened as to combine their labours to effect an object which is desired by all, and at the first moment when it was possible tho execute it*". (Thomson *and* Tait, *Treatise on Natural Philosophy Vol. I. part. 1. pag. 366).*

Nie jest moim zamiarem zapuszczać się w historyję przębiegu dawnych i nowszych pomiarów ziemi jakotéż w rozbiór wielkich prac dokonanych dotąd przez międzynarodowe Stowarzyszenie europejskiego pomiaru, tém bardziéj, że nie czuję się powołanym do tego. Niepodobno mi jednak pominąć niektórych epizodów z dziejów nauki, aby uprzytomnić krótko dzisiejszy stan wiadomości naszych o wielkości, a zwłaszcza o kształcie ziemi.

Po rok 1669 mogła być mowa tylko o rozmiarach ziemi, gdyż *a priori* przypuszczano, iż kształt jéj jest kulisty. W tym roku wykonał Picard pomiar części południka od Malvoisine do Amiens, który następnie przez Lahirea został przedłużonym na północ do Dunkierki, a przez Cassiniego na południe do Perpignan. Z obliczeń ogłoszonych dopiéro

w r. 1718 przez ostatniego, okazało się, że jeden stopień południka na szérokości Paryża i Bourges mierzy 57098 toazów, a takiż stopień między Paryżem a Dunkierką, 56970 toazów. CASSINI wywnioskował ztąd, że ziemia ma kształt ellipsoidy wydłużonéj ku biegunom, i taki był piérwszy domysł o właściwym kształcie ziemi.

Przeciwko temu mniemaniu wystąpił stanowczo NEWTON, podnosząc poważne argumenta teoretyczne na dowód, że ziemia posiada kształt ellipsoidy obrotowéj na biegunach spłaszczonéj, wniosek do którego doszedł także Ch. HUYGHENS w swych poszukiwaniach teoretycznych. W przypuszczeniu piérwotnéj płynności i jednorodności ziemi, obliczył sławny autor Zasad Filozofii Natury spłaszczenie południka na $\frac{1}{230}$ równikowego promienia ziemi.

Spór jaki skutkiem tego powstał między zwolennikami zapatrywań CASSINIEGO z jednéj, a NEWTONA i HUYGHENSA z drugiéj strony okazał, iż stanowcze rozstrzygnięcie jego może nastąpić dopiéro po wykonaniu nowego pomiaru południka w dwóch znacznie różnych szérokościach geograficznych. Tak powstały dwie wyprawy naukowe w roku 1738 urządzone staraniem paryskiéj Akademii Umiejętności, jedna do Peruwii pod przewodnictwem BOUGUERA i CONDAMINEA, druga do Laponii z uczonymi MAUPERTUIS i CLAIRAUT na czele. Z prac tych okazało się, że jeden stopień południka pod równikiem mierzy 56753 toazów, takiż sam stopień dla 66°20' szérokości geograficznéj północnéj 57437 toazów, skutkiem czego naukowy spór rozstrzygniętym został na korzyść zapatrywań NEWTONA i HUYGHENSA. Wielkosć spłaszczenia sferoidu ziemskiego wyprowadzona z wszystkich trzech pomiarów, znaleziono równą $\frac{1}{324}$ równikowego promienia ziemi, a chociaż liczba ta nie mogła mieć — stósownie do środ-

ków pomiaru jakiémi wówczas rozporządzano — pretensyi do ścisłości ilościowéj, to jednak powiedzieć można, że jakościowo kwestyja kształtu ziemi została stanowczo załatwioną.

Długo niewytłumaczone spostrzeżenie astronoma Richera w Cayennie (r. 1672) i jeszcze wcześniejsze takie spostrzeżenie E. Halleya, że wahadło sekundowe w bliskości równika odbywa wahnienia leniwiéj niż w wyższych szérokościach geograficznych, okazało się teraz nieuniknionêm następstwem sferoidalnego kształtu ziemi. Pozorna siła ciężkości ziemi, od któréj zależy czas trwania jednego wahnienia, zmniejsza się więc idąc od bieguna ku równikowi a to z dwóch przyczyn: większego oddalenia równika od środka ziemi i zwiększonéj siły odśrodkowéj, któréj działanie jest przeciwném, rzeczywistéj sile ciężkości. Szczupłość dat experymentalnych z jednéj strony, a niewykształcenie analizy matematycznéj z drugiéj strony były powodem, dla którego prawo owego zmniejszania się ciężkości od bieguna ku równikowi nie dało się wynaleźć, ale sam fakt zmniejszania się nie ulegał daléj już żadnéj wątpliwości.

W r. 1743 ogłosił Alexis Clairaut swe rozgłośne dzieło p. t. *Théorie de la Figure de la Terre*, które stanowi erę w dziejach tego przedmiotu, tak pod względem nowości i wielkiéj doniosłości rezultatów, jakotéż pod względem bardzo oryginalnéj metody po raz piérwszy użytéj w badaniach tego rodzaju. Trzy najważniejsze wyniki badań Clairauta są:

1. Ziemia jest ciałem niejednorodném, którego zewnętrzne warstwy „poziomu“ są również spłaszczonemi. Spłaszczenie warstw wzrasta, idąc od środka ku zewnętrznéj powiérzchni.

2. Przyrost siły ciężkości od równika ku biegunom, jest proporcyjonalnym do kwadratu wstawy szérokości geograficznéj.

3. Jeżeli ciężkość na równiku weźmiemy za jednostkę, to całkowity przyrost ciężkości od równika do bieguna, powiększony spłaszczeniem ziemi, jest równym $\frac{5}{2}$ stosunku siły odśrodkowéj na równiku do ciężkości tamże. Związek matematyczny tą równością wyrażony nosi powszechnie nazwę prawa Clairauta.

Ważne te odkrycia stały się źródłem nowych poszukiwań astronomów, geodetów i fizyków. Z jednéj strony pozyskała nauka drugą całkiem nową metodę wyznaczenia kształtu ziemi za pomocą pomiaru ciężkości w różnych miejscach powiérzchni sferoidu ziemskiego, niezależną zupełnie od pomiarów geodezyjnych, z drugiéj zaś strony otworzyła się nowa droga dla badań umysłu ludzkiego: pomiar całego ciężaru niejednorodnéj ziemi i jéj średniéj gęstości. W obydwóch kierunkach byłby do zapisania długi szereg imion najznakomitszych uczonych minionego i bieżącego stulecia. Wszelako jedna jeszcze trudność była do pokonania: prawa wynalezione przez Clairauta metodą, jak nadmieniliśmy, bardzo osobliwą i jak gdyby wyłącznie dla téj kwestyi odlaną, nie nosiły na sobie piętna prawdy wszystkich przekonywającéj tém bardziéj, że młody ich twórca oparł się na zasadzie piérwotnéj płynności ziemi, t. j. hypotezy, mogącéj mieć za sobą większą lub mniejszą cechę prawdopodobieństwa, lecz nie mającéj wiele wspólnego z obecną postacią i grawitacyją naszéj planety.

Laplace zapełnił tę lukę w większéj części, dowodząc z całą ścisłością, że wzór przedstawiający prawo Clairauta jest ważnym nie tylko dla masy piérwotnie płynnéj, lecz także dla wszelkiéj niejednorodnéj masy stałéj lub płynnéj kształtu zbliżonego do kuli a złożonéj z warstw współśrodkowych o równéj gęstości. G. Stokes posunął się jeszcze daléj dowodząc za pomocą wielkiego aparatu matematycznego, że prawo Clairauta jest prawdziwém, jeżeli tylko po-

wiérzchnie stałego potencyjału mają kształt zbliżony do kuli, przyczém prawo rozdzielenia gęstości wewnątrz takiego sferoidu może być jakiemkolwiek. Ztąd wniosek niezmiernéj wagi w astronomii i geografii fizycznéj, iż niezależnie od wszelkiéj hypotezy rozdzielenia gęstości wewnątrz ziemi, za pomocą samych doświadczeń wahadłowych, dokonanych w różnych miejscach jéj powiérzchni, można wyznaczyć wielkość spłaszczenia ziemi.

Z takichto doświadczeń, zainaugurowanych w r. 1825 przez E. Sabinea, a odtąd dokonywanych w różnych miejscach całéj stałéj powiérzchni ziemi przez wielu astronomów i uczonych podróżników, wynalezione spłaszczenie ziemi zbliża się o k r ą g ł o b i o r ą c do spłaszczenia oznaczonego bezpośredniémi pomiarami geodezyjnémi. Doświadczenia wahadłowe robili Sabine, Foster, Goldingham, Kater, Hall, Brisbane, Basevi, Heaviside, Sawicz, Freycinet, Duperrey, Luetke, Biot i Arago. Z wszystkich tych 104 doświadczeń wypadło spłaszczenie równe $\frac{1}{289}$, podczas gdy z prac tryangulacyjnych okazuje się $\frac{1}{294}$, a z dawniejszych obliczeń Bessela nawet $\frac{1}{299{\cdot}15}$.

Tu miejsce zauważyć jednak, że wzór Clairauta może być prawdziwym jedynie dla sferoidów kształtem swym bardzo mało różniących się od kuli, a w dowodzeniach jego, tak w piérwotném przez samego Clairauta, jak i w późniejszych Laplacea i Stokesa, zawartém jest *implicite* przypuszczenie, iż wszystkie potęgi spłaszczenia wyższe nad piérwszą, z powodu ich małości wolno w ciągu rachunku pominąć. Uwaga ta, na którą śmiem cały nacisk położyć, wydaje mi się potrzebną wobec tego, co poniżéj podniesioném zostanie.

Niezupełną zgodność w wyniku końcowym obydwóch metod oznaczenia spłaszczenia ziemi, ów „*hiatus*“ jak go znakomity geodeta Col. A. R. CLARKE F. R. S. nazywa, starali się niektórzy uczeni usunąć za pomocą rozmaitych redukcyj materyjału doświadczalnego na podstawie wzoru CLAIRAUTA, rodukcyj opartych na mniéj lub więcéj słusznych przypuszczeniach; łatwo jednak dostrzedz, iż wszelka taka praca nie opłaci zgoła mozołu rachunków i jest po prostu illuzoryczną. I o cóż bowiem chodzi? Rachunkowe wytłomaczenie malutkiéj róznicy $\left(\frac{1}{289} - \frac{1}{299}\right) = \frac{1}{8641}$ będącéj w porównaniu z samém spłaszczeniem ilością wyższego rzędu, będzie tak długo rzeczą daremną i wprost niemożliwą, jak długo teoretyczna dokładność wzoru CLAIRAUTA nie zostanie posuniętą tak daleko, aby w nim ilości tego rzędu co ów „*hiatus*“, dotąd pomijane, znalazły swe uwzględnienie.

Słowo w słowo ta sama uwaga stosuje się do spostrzeżenia, że spłaszczenie wypadające z doświadczeń wahadłowych południowéj półkuli jest cokolwiek większém od spłaszczenia obliczonego w ten sam sposób dla półkuli północnéj — spostrzeżenie uczynione po raz piérwszy przez LAPLACEA. Różnicę $\left(\frac{1}{280} - \frac{1}{288}\right) = \frac{1}{10080}$ tłómaczyć przypadkowémi błędami spostrzeżeń i doświadczeń, a następnie naginać ją do zera zapomocą metody najmniejszych kwadratów znaczyłoby to samo, co rozmyślnie zacierać możliwy wpływ ilości pomijanych w przybliżonym wzorze CLAIRAUTA na końcowy rezultat poszukiwania.

W drugim ze wspomnianych wyżéj kierunków badania t. j. kwestyi oznaczenia ciężaru niejednorodnéj ziemi i średniéj jéj gęstości, chwycono się kilku odmiennych metod experymentalnych, których wspólną zasadą było porównywanie przyciągania całéj ziemi (t. j. siły ciężkości) z przy-

ciąganiem jakie wywiéra znana masa na tenże sam punkt. I tak już Bouguer z przyciągania pionu przez łańcuchy górskie Andów, Maskelyne i Hutton z takiegoż przyciągania przez odosobnioną górę, podobnież Playfair, Col. James, Carlini na Mont Cenis, Plantamour na Rigi-Kulm i inni, starali się wyznaczyć średnią gęstość ziemi bądź to obserwując wielkość pochylenia się pionu ku masie górskiéj, bądź téż wyznaczając experymentalnie zmianę czasu wahnienia spowodowaną jéj przyciąganiem. Inni, z pomiędzy których należy wymienić przedewszystkiém Cavendisha, Reicha, Bailyego i Jollyego w Monachium, starali się ten sam cel osiągnąć za pomocą nader czułych wag osobnéj konstrukcyi, których ramiona były wystawione na działanie przyciągające znanych mas. Ale najgenialniejszą metodą dla podobnych celów obmyślaną, jest niewątpliwie metoda filozofa i matematyka Wilhelma Drobischa polegająca na experymentalném wyznaczeniu siły ciężkości na powiérzchni ziemi i na dnie kopalni pod jéj powiérzchnią. (*De vera lunae figura annexa appendice de interiori terrae natura, Lipsiae ...... 1826*).

Metoda ta użytą została po raz piérwszy w r. 1828 przez dyrektora król. Obserwatoryjum astronom. w Greenwich Sir G. Biddell Airyego w kopalniach Dolcoath w Kornwalii, a gdy experyment się nie udał dla przyczyn niemających z jego istotą żadnego związku, przystąpił w jesieni r. 1854 Airy do ponownego jego wykonania w kopalniach węgla w Harton. Tym razem piękny experyment, odbywający się zresztą wśród okoliczności bardzo sprzyjających powiódł się w zupełności, a stosunek siły ciężkości na dnie 1256 stóp głębokiéj kopalni, do téjże siły na powiérzchni ziemi starannie wyznaczonym został. (*Proceedings of the Royal Society. Vol. VIII. pag. 13*).

Wzór matematyczny W. Drobischa, który dozwolił teraz ze znalezionéj experymentem liczby wynaleźć średnią gęstość ziemi, jest następujący:

$$\frac{d}{D} = \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{g}{g_1}\right) \frac{r}{3h}$$

gdzie d jest średnią gęstością ciał na powiérzchni ziemi, D średnią gęstością całéj ziemi, r promieniem ziemi, h głębokością kopalni, a g i g_1 wielkością siły ciężkości na powiérzchni ziemi i na dnie kopalni. Wzór powyższy, do którego wyprowadzenia wystarczają już elementarne zasady teoryi grawitacyi i matematyki, zapewne nie swoją rachunkową stroną przynosi zaszczyt filozoficznemu umysłowi Drobischa, tém bardziéj iż jest on tylko przybliżeniem, ważném jedynie w przypuszczeniu, że wolno w rachunku pominąć wszystkie potęgi rzędem wyższe nad piérwszą spłaszczenia ziemi i ilości mu równych. Pod tym względem wzór Drobischa posiada ważność analogiczną do wzoru Clairauta. Obydwa są tylko piérwszém przybliżeniem do istotnego stanu rzeczy, co prawda prawie wystarczającém wobec małości aberracyi ziemi od kształtu kulistego i tak długo wystarczającém, dopóki na seryjo podjętém nie zostanie pytanie:

Czy powiérzchnia oceanu jest w istocie elliptycznym sferoidem obrotowym, czy téż nie różni się ona od ostatniéj powiérzchni o wielkości dzisiejszym naszym pomiarom dostępne?....

Jeżeli na ostatnie pytanie odpowiedź będzie twierdzącą, to jasna że ani prawo Clairauta ani wzór Drobischa nie mogą być wystarczające, a dokładność rachunków teoretycznych musi być daléj posuniętą, aby sprowadzić pożądaną zgodność teoryi z pomiarami i experymentami. W chwili w któréj okazałoby się, że równoleżniki ziemi nie są kołami, a południki nie są ellipsami, pojęcie spłaszczenia ziemi stałoby się wieloznaczném stosownie do południka branego na uwagę, a wzór Clairauta w kształcie dotąd używanym przestałby być wyrazem prawdy.

Możnaby sądzić, że w obydwóch wyżéj wspomnianych kierunkach rozwinęła się równoległa czynność intelligencyi ludzkiéj. Tak jednak nie jest. Podczas gdy ilość experymentów, wykonanych w celu oznaczenia wielkości siły ciężkości w różnych miejscach powiérzchni ziemi, liczy się dziś na setki i obejmuje rozsiedleniem się swojém prawie wszystkie jéj zakątki (całe wnętrze Afryki stanowi dotąd tylko wyjątek), experymenta wykonane w celu oznaczenia wielkości siły ciężkości pod powiérzchnią ziemi stoją całkiém odosobnione i są prawdziwą rzadkością. Zdaje się, że wielka ważność doświadczeń wykonanych na wzór Airyego w kopalniach Hartońskich uchodzi jeszcze całéj baczności uczonych, czego przyczyny szukać należy w pewnéj rutynie pracy nowoczesnych geodetów, którzy bez przeciążenia nie mogli byli przyjąć tych doświadczeń do wielkiego i tak już zakresu swych zajęć zasadniczych.

Drugie i dotąd ostatnie doświadczenia z wahadłem w celu oznaczenia zmiany siły ciężkości wewnątrz sferoidu ziemskiego, wykonane zostały w latach 1882 i 1883 przez Majora R. Sternecka członka wiedeńskiego c. k. wojskowego Instytutu geograficznego, w kopalniach srebra w Přibram (Czechy środkowe). Zastrzegając sobie na inny raz wysnucie wniosków z pięknych experymentów tego uczonego, ograniczę się w téj chwili do skonstatowania istnienia różnic w wynikach doświadczeń Sir Airyego i Maj. Sternecka, różnic, których ostatni nie wyjaśnił. Rozbierając krok za krokiem pracę Maj. Sternecka, znalazłem ubiegłéj zimy w niéj błąd rachunkowy, który według mych własnych przeliczeń musiał znacznie wpłynąć na końcowy rezultat autora i niezwłocznie zawiadomiłem go o tém. Odpowiedź Majora Sternecka zawiérała potwierdzenie mego domysłu i zarazem wezwanie, abym wykonał definitywną redukcyję i wyrównanie doświadczeń Přibramskich dla kontroli jego wła-

snych rachunków. Tym razem p. Major Sterneck również i ja otrzymaliśmy z dwóch niezależnych od siebie obliczeń rezultaty w najdrobniejszych szczegółach z sobą zgodne, lecz jeszcze znacznie różniące się od wyników Airyego. W korespondencyi tak nawiązanéj przyszedłem wraz z p. Maj. Sterneckiem do wspólnego przekonania, że

1. Eliminacyja t. z. „lokalnych wpływów“ na powyższe doświadczenia stanie się możliwą dopiéro wówczas, gdy nauka będzie posiadała większy zasób materyjału doświadczalnego zebranego z różnych miejsc powiérzchni ziemi i że wówczas średnia gęstość ziemi wraz z prawem rozdzielenia potencyjału grawitacyjnego dla ziemi da się wyznaczyć z dokładnością jakiéj żadna inna metoda, dotąd znana, nie jest w stanie dostarczyć — daléj że

2. Użycie synchronizmu wahadłowego, a zwłaszcza wahadła zwrotnego (*Reversionspendel*) stanowi w takich doświadczeniach stałe źródło błędów przypadkowych, których usunięcie dzisiaj byłoby — niestety — pracą daremną.

Pod tym względem pozwalam sobie przytoczyć jeden ustęp listu pisanego do mnie przez p. Majora Sternecka:

„..... *Sie haben meine bisherigen spärlichen Resultate einer eingehenden Prüfung unterzogen und gezeigt, wie wichtig und nothwendig die Ausführung derartiger Arbeiten auf diesem noch so wenig kultivirten Gebiete ist. Es ist zum Staunen, wie wenig bisher in dieser Hinsicht geleistet wurde; fast alles blieb der Theorie überlassen, und dieser fehlt offenbar ein zahlreiches Beobachtungsmaterial, auf welches sie sich stützen kann. Ich glaube einen grossen Theil der Schuld an diesem Versäumnisse trägt in den letzten Decennien die Verwendung des Reversionspendels zur Bestimmung der Schwere, welches bei so vielen Unbequemlichkeiten nicht jene Genauigkeit biethen kann, die man erwartet; man gibt sich, meiner Meinung nach, in dieser Hinsicht einer grossen Täuschung hin*“.

Ale doświadczenia w mowie będące są jeszcze pod innym względem wielkiéj wagi. Według ogólnego twierdzenia Greena i Gaussa potencyjał grawitacyjny (a więc także elektryczny i magnetyczny) będzie znanym dla całéj przestrzeni zewnątrz danéj masy położonéj, jeżeli znaną będzie dokładna jego wartość na dowolnéj powiérzchni zamkniętéj, osłaniającéj w zupełności ową masę. Z doświadczeń wahadłowych wykonanych na powiérzchni ziemi, można tedy wyprowadzić wielkość i kierunek siły ciężkości ziemi w dowolnym punkcie zewnątrz ziemi, a to w sposób całkiem jednoznaczny, jakiemkolwiek byłoby rozdzielenie mas i gęstości wewnątrz sferoidu ziemskiego. Inaczéj ma się sprawa dla potencyjału grawitacyjnego wewnątrz ziemi. Daje się udowodnić z całą ścisłością (Laplace, Poisson i Gauss), że potencyjał masy jakotéż jego piérwsze pochodne cząstkowe (tj. składowe siły ciężkości w 3 prostopadłych kierunkach) są funkcyjami zawsze ciągłemi 3 zmiennych niezależnych, wyrażających położenie przyciąganéj cząstki w przestrzeni, a tę przepowiednię teoryi experyment w zupełności potwierdza. Począwszy od poziomu morza idąc na zewnątrz siła ciężkości zmienia się sposobem ciągłym, idąc ku wnętrzu wzrasta w taki sam sposób. Ale nie ma to miejsca dla drugich pochodnych potencyjału grawitacyjnego. Oznaczywszy ostatnią fnnkcyję przez V, współrzędne zaś przyciąganéj cząstki przez ξ, η, ζ wiemy, iż trójmian

$$\frac{d^2\,V}{d\,\xi^2}+\frac{d^2\,V}{d\,\eta^2}+\frac{d^2\,V}{d\,\zeta^2}$$

jest zerem dla wszelkiego punktu zewnętrznego, ale tylko zewnętrznego, gdyż na saméj powiérzchni ciała przyciągającego następuje zerwanie ciągłości, a dla wszelkiego punktu wewnętrznego wartością powyższego trójmianu jest $-4\pi\rho$, gdzie ρ jest gęstością przyciąganéj cząstki zewnątrz

ciała. Wyobraźmy sobie teraz że funkcyja V zostanie doświadczeniami wahadłowemi wyznaczoną dla kilkudziesięciu rozmaitych punktów pod powiérzchnią ziemi, to na podstawie tego materyjału doświadczalnego da się według bezpiecznych wskazówek teoryi zbudować tak samo prawo ciężkości wewnątrz ziemi, jakie dziś posiadamy dla siły ciężkości na i nad powiérzchnią sferoidu ziemskiego, skutkiem czego potencyjał grawitacyjny V będzie znanym dla każdego dostępnego czy niedostępnego punktu wewnątrz ziemi w obrębie całéj uważanéj warstwy. Bezpośredniém następstwem tego będzie, że gęstość ρ wiérzchniéj warstwy ziemi da się wynaleźć samym już rachunkiem dla każdego dostępnego czy niedostępnego punktu nadmienionéj warstwy globu ziemskiego.

Tu geologija i geografija fizyczna są w piérwszym rzędzie interesowane: jakie korzyści odniosłyby te nauki na téj drodze badania przyrody, przedwczesném byłoby zapytywać. Ale wierzyć wolno, że jak każdy nowy punkt widzenia wspólny dwom lub więcéj naukom przyrodniczym, tylko rozszérzenie widnokręgu wyobrażeń i zdobywanie nowych prawd naukowych za sobą pociągał, tak i tu nie stałoby się inaczéj. Przyroda jest całością, któréj szczegóły nie są sobie obcémi — a pewnie żadném z ogniw łączących duchowym węzłem praw natury nauki pokrewne, gardzić człowiekowi nie należy.

Zmuszony jestem dotknąć tutaj jeszcze jednéj rzeczy, która wprawdzie nie kwalifikuje się do pobieżnéj wzmianki i wymaga obszerniejszego wywodu, która jednak stoi w tak bliskim związku z poruszonym tu przedmiotem, iż proste jéj przemilczenie, mogłoby uchodzić za unikanie napotkanych trudności zamiast ich pokonywania.

Mam tu na myśli kwestyję t. z. attrakcyj „lokalnych“, które jednak wbrew ich nazwie wcale lokalnemi nie są, a zależąc tak dobrze od małych nierówności terenu

w pobliżu uważanego miejsca jak i większych nieprawidłowości w konfiguracyi odleglejszych mas lądowych rozciągają się zawsze na wielkie obszary powiérzchni ziemi lub — powiedzmy wprost — na całą jéj powiérzchnię. Rozwój naszych wyobrażeń na tym punkcie jest nader pouczającym epizodem w dziejach nauki a tém ważniejszym, ile że okazuje, jak powoli — i rzekłbym — z jakim trudem wyjaśniło się pojęcie istotnego kształtu ziemi i jego definicyja. Piérwszy, jak sądzę, był Bouguer, który podczas wyprawy Peruwiańskiéj 1738 r. uderzony niebotycznością Kordylijerów południowych wypowiedział z pewném wahaniem mniemanie, iż przyciąganie tych wielkich mas górskich, może wywrzeć dostrzegalny wpływ na dokładność prac geodezyjnych i astronomicznych potrzebnych do pomierzenia długości części południka Peruwiańskiego. Co więcéj. opierając się na przybliżonych danych rozmiarach i gęstości góry Chimborasso obliczył Bouguer, że w skutek przyciągania téj góry obserwowane szérokości geograficzne mogą się różnić od rzeczywistych o kąt przewyższający jedną minutę łuku (por. Zach *L'attraction des montagnes et ses effets sur les fils à plomb .... Avignon 1814.* pag. 8), a jakkolwiek dzisiaj nie ma żadnéj wątpliwości, że oznaczenie Bouguera jest wygórowaném, to jednak sam fakt odchylania pionu przez nadmiar mas górskich, płaskowzgórz, itd. a względnie „brak" takichże mas po głębokich dolinach i nisko położonych wyspach, jest niezachwianym. Już poprzednio wspomnieliśmy, jak zdołano takie odchylenia pionu przez większe masy górskie wyzyskać w celu przybliżonego obliczenia średniéj gęstości ziemi.

Zachodziło tedy pytanie, co właściwie należy rozumieć przez wyraz „geometryczna postać" ziemi (a raczéj morza)? Dopóki nie było mowy o „lokalnych" attrakcyjach, nie było widocznie troski o to. Gdy jednak wszelka wątpliwość w istnienie takich zboczeń ustąpić musiała dotykalnym dowodom, skierowano usiłowania do tego, aby „uwolnić" zdję-

cia geodezyjne i astronomiczne od wpływu „perturbującego“ tych przyciągań, a w ten sposób domniemywanemu elliptycznemu sferoidowi ziemskiemu usunąć niejako zawadę w jego swobodnym pochodzie także wśród takich perturbowanych miejscowości. Wyraźniéj mówiąc, starano się — na wzór Bouguera — z przybliżonego kształtu, rozmiarów i gęstości mas perturbujących wynaleźć rachunkiem kierunek i wielkość takich odchyleń pionu, aby w ten sposób obserwowane szérokości geograficzne i azymuty — jak się wyrażano — poprawić. Znaczyło to więc wyznaczać kształt powiérzchni morza nie rzeczywiście istniejący, ale taki, jaki istniałby, gdyby wszystkie nierówności lądów ponad lub po pod powiérzchnią oceanów zostały usunięte bez pozostawienia ich dałéj na ziemi. Ten system poprawiań, pomimo bardzo jasnéj definicyi Gaussa i Bessela, że

matematyczną powiérzchnią ziemi nazywamy średnią powiérzchnię oceanów według tego samego prawa krzywizny rozszérzoną także tam gdzie ich nie ma (t. j. po pod a względnie po nad niektóre masy kontynentalne)

powtarzam, pomimo całéj prostoty tego wyrzeczenia, system ów pozbywania się wpływu attrakcyi „lokalnych“ na pomiary geodezyjne, był do niedawna jeszcze bardzo uprawianym. Zwolennicy téj zwodniczéj czynności nie zdawali sobie snać sprawy z téj oczywistéj prawdy, iż

1) pion od kierunku normalnéj oddalać się nie może, jakotéż, że

2) powiérzchnia oceanów, któréj kształtu-z takim trudem szukamy, ulega tak samo jak pion nad nią zawieszony przyciąganiu owych perturbujących mas.

Idealne usunięcie ostatnich pociągnęłoby bowiem za sobą natychmiastową zmianę krzywizny oceanu, a powiérzchnia, któraby po użyciu takich „popraw“ jako końcowy wynik tyloletniego mozołu z rachunków wynikła, byłaby niezaprzeczenie matematyczną powiérzchnią — ale nie

ziemi. Wielkie zadanie geodezyi nowoczesnéj polega na znalezieniu kształtu powiérzchni sferoidu ziemskiego takiego, jakim on jest w istocie, nie zaś idealnego, jakim byłby, gdyby pewne wymuszone zmiany konfiguracyi profilów terenu dopiéro zajść miały.

I w łonie stałéj komisyi jakotéż pomiędzy uczestnikami ogólnych konferencyj europejskiego pomiaru geodezyjnego, panowały pod tym względem piérwotnie znaczne różnice zdań, dowodzące, że nie wszyscy ich uczestnicy mieli odwagę zerwać z ułudną rutyną „poprawy" wyznaczeń geodezyjnych i astronomicznych, popraw spowodowanych przez attrakcyje lokalne. Obszérne publikacyje téj Instytucyi z zawartemi w nich szczegółowemi sprawozdaniami z posiedzeń, nie pozostawiają i pod tym względem żadnéj wątpliwości (*General Berichte über die europaeische Gradmessung* i *Verhandlungen der.... allgem. Conferenz der europ. Gradmessung. Berlin 1861 f. f.*). Ale już wcześnie odzywały się głosy, co prawda odosobnione, przestrzegające przed użyciem nadmienionych popraw z oderwanych i najczęściéj luźnych szczegółów profilów lądowych. Oto co wypowiada już w r. 1861 zasłużony inicyjator pomiaru europejskiego i Nestor geodetów nowoczesnych:

„*Man hat diese Ablenkungen der Lothlinie durch die Anziehung hoher Bergmassen in der Nähe solcher Punkte zu erklaeren gesucht, allein diese Erklärung reicht nicht aus, denn sie finden ebensogut in den Ebenen und in grossen Entfernungen von den Gebirgen statt.... Es hat daher die Vermuthung, dass dichtere Massen unter der Oberfläche der Erde die eigentliche Veranlassung sind, eine grössere Wahrscheinlichkeit für sich*". (*Generallieut.* BAEYER. *Entwurf zu einer mitteleurop. Gradmessung. pag. 3*).

Corocznie wznawiana dyskusyja ustna i piśmienne opinije pełnomocnych uczestników pomiaru europejskiego rozproszyły zwolna wszystkie możliwe tu jeszcze wątpliwości.

Pełnomocnik belgijski major ADAN nadsyłając na żądanie centralnego bióra geodetycznego swą opiniję o wpływie attrakcyj „lokalnych“ na wyznaczenie kształtu powiérzchni morza, gdzie kładzie nacisk na niemożebność przymuszenia indyjskiego i wszystkich europejskich pomiarów do oskulacyi z jedną jedyną ellipsoidą obrotową — tak powiada:

„Déjà LAPLACE *avait recherché une formule propre á représenter le degré de meridiens sous une latitude quelconque et il ne put arriver qu'à une formule approximative, impropre à donner l'inclinaison de la normale sur le diamètre.*

Les recherches de JAMES *entreprises plus tard ne l'amenerent pas à un résultat concluant. Ne serait-il pas temps de reprendre cette question d'une façon tout-à-fait générale en se servant de toutes les mesures d'arcs de meridiens, qui conduiront peut-être à un ellipsoïde à trois axes inégaux suivant les idées du Géneral russe* SCHUBERT, *mises en pratique infructueusement par le Capt.* CLARKE *de l'Ordnance Survey?“ (Procès-verbaux des séances de la Commision permanente tenues à Paris du 20 au 29 sept. 1875, 6ᵉ séance pag. 34).*

Ostatnie zdanie o tyle tylko wypada uzupełnić, że Capt. (obecnie Colonel) CLARKE po powtórném przeprowadzeniu rachunków (skutkiem odkrycia błędu przy pomiarze południowéj części dawnego łuku indyjskiego) znalazł ściślejsze zbliżenie się elliptycznego sferoidu nieobrotowego aniżeli obrotowego z rzeczywistym kształtem powiérzchni oceanu. Suma kwadratów z pozostałych błędów jest w drugim razie półtora razy większą aniżeli w piérwszym (Col. A. R. CLARKE Geodesy Oxford 1880 pag. 308). Nie znaczy to jednak wcale że taki nieobrotowy sferoid elliptyczny ma być rzeczywiście szukanym kształtem oceanu.

W opinijach przysłanych przez generałów FORSCHA i FERRERO, a zwłaszcza w piśmie pełnomocnika duńskiego p. C. ANDRAE znajdujemy najdosadniejszą krytykę dawniéjszéj rutyny badania attrakcyj lokalnych.

Końcowy ustęp tego sprawozdania zasługuje na dosłowne powtórzenie:

„Es kann die Erde nur im Grossen und Ganzen als ein elliptisches Rotations-Sphaeroid betrachtet werden. Da die Dichtigkeiten in den Schichten der festen Erdrinde sehr unregelmaessig vertheilt sind und da die physische Oberfläche überall kleinere oder grössere Erhöhungen und Vertiefungen darbietet, muss die wirkliche oder matematische Oberfläche der Erde, welche durch die von der mittleren Meereshöhe ausgehende Niveau-fläche definirt wird, auch nothwendig eine ganz unregelmässige Form haben. Es heisst daher, wie schon Gauss *bemerkt hat, den Gegenstand aus einem falschen Gesichtspunkte betrachten, wenn man nur von Localablenkungen der Lothlinie spricht, indem solche Abweichungen ü b e r a l l erwartet werden müssen und nur ganz ausnahmsweise in einzelnen Punkten verschwinden können....“* (*Verhandlungen der fünften allg. Conferenz der europ. Gradmessung, Berlin 1878 pag. 244*).

Komisyja wybrana wreszcie w celu zbadania jakości wpływu attrakcyj lokalnych na pomiary geodezyjne i podania stanowczych środków zaradczych, spełniła swe zadanie tylko jednostronnie. Uznawszy zupełną nieodpowiedność środka dotąd używanego i oświadczywszy się p r z e c i w sposobowi wyznaczania attrakcyj lokalnéj z przybliżonéj konfiguracyi terenu — komisyja nie uchwaliła nic dodatnego. Z jednéj tylko strony błysnęła nadzieja dla téj opuszczonéj sprawy. P. Schering jeden z członków komisyi oznajmił publicznie, że od lat kilku zajmuje się tą ciemną kwestyją, że doszedł już do kilku ogólnych twierdzeń, których zastósowanie usunie główne trudności, że jednak na razie nie może jeszcze swéj pracy ogłosić. O ile mi jednak wiadomo, praca ta nie pojawiła się wcale. Ale rozjaśnienie wyczerpujące i stanowcze téj ważnéj rzeczy miało nastąpić ze strony najmniéj spodziewanéj.

Jeszcze w roku 1867 ogłosił niedawno zmarły uczony francuski p. Yvo Villarceau w rocznikach Liouvillea krótką ale piękną pracę o wpływie attrakcyj lokalnych a wkrótce potém dołączył inną pracę zawiérającą drugie kardynalne twierdzenie w téj materyi. Obie te prace popadły w zapomnienie i nie zwracały uwagi aż po rok 1875, kiedy sprawa attrakcyj lokalnych — to złe widmo prac międzynarodowego stowarzyszenia dla europejskiego pomiaru — stała się jedną ze stałych punktów programu ogólnych konferencyj geodezyjnych. Villarceau w tym roku pełnomocny uczestnik konferencyi ze strony Francyi, zwrócił uwagę członków konferencyi na dwie swoje prace, podające nową metodę wyznaczenia kształtu ziemi niezależnie od jakichkolwiek attrakcyj lokalnych i zapowiedział równocześnie trzecią pracę, zawiérającą ostateczne wykończenie genialnych swych pomysłów. Trzy klasyczne prace znakomitego Akademika francuskiego zostały przyjęte wprawdzie z pewną rezerwą, a ogłoszenie całości ich w protokołach posiedzeń nie wywołało żadnéj obszérniejszéj dyskusyi — poszczególne jednak głosy poważnych uczonych jak samego Scheringa i Petersa przyznały im całą tak zasłużoną doniosłość. Oto co pisze ostatni z wymiénionych astronomów w swym liście do pana Villarceau:

„*Votre exposition claire et achevée d'une méthode entièrement nouvelle pour déterminer la vraie surface de la Terre appartient sans doute aux oeuvres les plus importantes dans le ressort de la géodésie....*“ (*Procès-verbaux des séances... pour 1875 pag. 119*),

a że to wyrzeczenie nie było prostym objawem kurtoazyi piszącego, dowodzi między innémi publikowany list p. Scheringa do p. Villarceau, przyznający ostatniemu piérwszeństwo odkrycia prawdziwéj metody wyznaczenia postaci ziemi z pomiarów geodezyjnych bez względu na jakość i wielkość odchyleń pionu.

Résumé odkryć p. Villarceau zawarte w rozprawie p. t. *Nouveaux théorèmes sur les attractions locales et applications à la détermination de la vraie figure de la Terre (ibidem. Annexe 4. pag. 111)* rozwiązało omawianą tutaj kwestyję w sposób zasadniczy i zupełny. Perturbacyje „lokalne“ trapiące geodetów od lat tylu i alterujące skutkiem zmienności odchyleń pionu każdy pomiar geodezyjny, zostały tak ujęte w karby matematycznéj ścisłości, że oczekiwany przez wszystkich ostateczny wynik — prawdziwy kształt powiérzchni morza — zostanie od tego wpływu uwolnionym. Piérwsza metoda wyznaczenia kształtu téj powiérzchni za pomocą pomiarów astronomiczno-geodezyjnych została pracami p. Villarceau w tym stopniu wykończoną, że zastósowanie jéj do wspaniałego zadania nowoczesnéj geodezyi już tylko wyłącznie od dokładności samych pomiarów może być zawisłą.

Czy i druga metoda do tego celu wiodąca, metoda polegającą na zastósowaniu wzoru Clairauta została przez te prace wykończoną tak, iżby wpływ różnorodnéj konfiguracyi mas lądowych na wielkość siły ciężkości został również ściśle oznaczonym? Z pewnością że nie. Jak każda siła w przyrodzie określa się kierunkiem i wielkością, tak samo siła wypadkowa attrakcyj „lokalnych“ globu ziemskiego posiada te dwa określniki, z których tylko piérwszy, tj. kierunek perturbującéj siły wpływa na pomiary astronomiczno-geodezyjne i ten tylko określnik perturbacyi został przez p. Villarceau wyczerpująco zbadanym. Wpływ tych przyciągań na samą wielkość siły ciężkości ziemi był dotąd zbadanym tylko w bardzo szczupłym zakresie i z tak nieogólnego punktu widzenia, że „poprawy“ wielkości grawitacyi ziemskiéj raczéj zatajenie niż rozjaśnienie rzeczywistego stanu rzeczy musiały za sobą pociągnąć. Jeżeli experymentator obserwujący wahnienia wahadła sekundowego n. p. w Neapolu stara się wyeliminować zmianę czasu wahnienia spowodowaną przyciąganiem pobliskiego Wezuwiusza i rze-

czywiście tę eliminacyję w grubém przybliżeniu wykonywa, to pojmujemy i uznajemy ostrożność badacza. Ale nie pojmujemy dlaczego tenże uwzględnia nierówność terenu tylko w najbliższém sąsiedztwie, kiedy znacznie potężniejsze nierówności takie jak łańcuchy Alp i Pyreneów dla ich większego oddalenia całkowicie pomija, gdyż leżą poza widnokręgiem miejsca obserwacyi. A przecież poprawa czasu wahnienia wynikająca z pominięcia tych — okiem na razie niedostrzegalnych — wpływów może być w dwójnasób większą aniżeli poprawa wykonana przezeń skutkiem przestrogi widzialnego Wezuwiusza! Anormalne długości wahadła sekundowego na wielkich obszarach równych i jednostajnych płaszczyzn i na samotnych wysepkach wielkich oceanów, były jedną z najciemniejszych kwestyj w geografii fizycznéj, dla których wytłumaczenia uciekano się niekiedy do przypuszczeń bardzo nieprawdopodobnych. Zapominano, że jednostajna powiérzchnia lądów lub gładkie zwierciadło oceanu jest zwodniczą maską, pod którą kryć się mogą i niewątpliwie kryją się wielkie nierówności rozdzielenia mas i gęstości w najbliższéj warstwie sferoidu ziemskiego, że dno morskie przedstawia różnorodność kształtów i gęstości przewyższającą niekiedy widzialne nierówności stałéj jego powiérzchni. Z bardzo szczupłéj ilości prac naukowych zdradzających wyraźną świadomość tego postulatu fizycznego wynika raczéj zwątpienie aniżeli nadzieja, iżby owa różnorodność kształtów i mas dała się kiedykolwiek uchwycić w kształt dostępny badaniom teoretycznym. Sir William Thomson F. R. S. dotykając téj rzeczy w drugiéj części piérwszego tomu swojéj Filozofii natury, obiecuje zajęcie się tą zawiłą perturbacyją mówiąc:

„*We intend to return to the subject in Vol. II. under Properties of Matter, when we shall have occasion to examine the phenomenal and experimental foundations of our knowledge of gravity*; *and we shall then... to investigate the effects*

on the m a g n i t u d e *and direction of gravity, and on the level surfaces, produced by isolated hills, mountain — chains large table lands, and by corresponding depressions, as lakes or circumscribed deep places in the sea great valleys or clefts, large tracts of deep ocean*". (*Treatise on Natural Philosophy, Cambridge 1883. Vol. 1. Part. 2 second edition pag. 354*), lecz tom drugi dzieła znakomitego profesora glasgowskiego nie ukazał się dotąd, a (jak świéżo sam autor donosi) nawet piérwotna myśl jego publikacyi obecnie — niestety — porzuconą została. Tak tedy druga metoda wyznaczenia kształtu powiérzchni morza z obserwacyi grawitacyjnego potencyjału ziemi (t. j. doświadczeń wahadłowych) wyciosana z grubsza przez Clairauta i jego następców, nie może poszczycić się wykończeniem, jakie posiada metoda astronomiczno-geodezyjna. Prace p. Villarceau są niewątpliwie ostatniém słowem jakie wypowiedziała geodezyja teoretyczna — reszta jest rzeczą praktycznéj. Przybliżony wzór Clairauta, dostateczny dopóki chodzi o wyznaczenie kształtu elliptycznego sferoidu obrotowego oskulującego rzekomo z powiérzchnią oceanów, jest tedy a n o m a l i j ą wśród istotnego stanu prac i odkryć geodezyjnych. W obec niewątpliwie skonstatowanych „falistości" powiérzchni spokojnego morza i anomalii równoleżników od kształtu koła, pojęcie spłaszczenia figurujące we wzorze Clairauta jest wieloznaczném, skutkiem czego sam wzór w dzisiejszym jego kształcie — nieprzydatnym.

Taki jest stan dzisiejszych naszych wiadomości o matematycznym kształcie sferoidu ziemskiego, jako téż o rozdzieleniu gęstości i potencyjału wewnątrz niego. Jeżeli cokolwiek za długo rozwiódłem się nad tym przedmiotem, to niechaj mnie usprawiedliwi wielka ważność rzeczy i różnorodność naukowego materyjału tu należącego. Sprowadzenie rozlicznych zjawisk, prac i usiłowań w tym kierunku do

jednego wspólnego punktu widzenia, może dopiéro pouczyć, co w zakréślonych tym poszukiwaniom granicach dla wiedzy już nabytém zostało, a co jeszcze dla dalszych badań do rozświecenia pozostaje.

Od sześciu lat zajmuje się piszący te słowa prawie bezustannie pracami teoretycznemi w kierunku wyżéj nadmienionym, starając się, o ile siły jego na to zezwalały, wniknąć tak w zasadnicze podstawy naukowych wyobrażeń, jak i powikłane szczegóły wielkiego zasobu empirycznych wiadomości, które w téj materyi nagromadzone zostały. Wychodząc od definicyi i najpiérwszych własności funkcyi zwanéj potencyjałem grawitacyjnym, opracowałem *ab ovo* zadanie matematycznego kształtu powiérzchni ziemi i rozdzielenia tegoż potencyjału dla dowolnego punktu zewnętrznego lub wewnętrznego, przyczém dokładność rachunków posunąłem daléj aniżeli to dotąd było praktykowaném. Wspomniana dokładność polega na tém, że w swych rachunkach uwzględniłem wyrazy pochodzące z widzialnéj dysymetryi powiérzchni ziemi i z możliwéj choć niewidzialnéj dysymetryi mas w jéj wnętrzu, wyrazy, które w dotychczasowych teoryjach ustroju ziemi powszechnie pomijane były. Z rachunków mych okazały się następujące wyniki:

1. Powiérzchnia morza tylko w piérwszém przybliżeniu może uchodzić za powiérzchnię elliptycznego sferoidu obrotowego, a podstawienie ellipsoidy nieobrotowéj za obrotową nie ocala wymaganéj dokładności. Uwzględnienie wpływu dysymetryi sferoidu ziemskiego (t. j. przyciągań lokal-

nych) wprowadza w biegunowe równanie powiérzchni poziomu morza dziesięć nowych parametrów dających się wyznaczyć operacyjami geodezyjnemi, a odpowiadających nieuniknionym „falistościom“ powiérzchni morza.

2. Wzór Clairauta jest tylko piérwszém przybliżeniem do prawdy, a to wówczas, jeżeli wpływ dysymetryi ziemi i wyższe potęgi spłaszczenia pominiemy; istnieje zresztą najwyżéj sześć takich południków, dla których jest on zgodny z rzeczywistością.

Uwzględnienie wpływu dysymetryi przydaje do tego wzoru wyraz zależny od długości geograficznéj południka, dla którego szukamy spłaszczenia. Wprowadzając w tak uogólniony wzór Clairauta wartości pozornéj siły ciężkości obserwowane w rozmaitych punktach powiérzchni ziemi, nie tylko jak dotąd z przynależnemi szérokościami geograficznemi, ale i z odpowiedniemi długościami liczonemi od Greenwich, otrzymuje się bezpośrednio spłaszczenie dowolnego południka ziemi.

3. Wzór W. Drobischa podający stosunek siły ciężkości na poziomie i pod nim jest tylko piérwszém przybliżeniem powstałém z pominięcia wpływu spłaszczenia i zmiany siły odśrodkowéj na wielkość siły ciężkości we wnętrzu ziemi. Uwzględniając obydwa te wpływy doszedłem do związku zawiérającego w swym kształcie średnie spłaszczenie ziemi, zkąd wypada ten uwagi godny wniosek, iż za pomocą dokładnych doświadczeń wahadłowych na powiérzchni ziemi i w dostępnéj głębokości pod nią oprócz potencyjału grawitacyjnego i średniéj gęstości ziemi daje się wynaleźć także średnie spłaszczenie ziemi. Wykonanie takich doświadczeń przysporzyłoby tedy nauce trzecią metodę wyznaczenia średniego spłaszczenia ziemi, niezależną od tamtych dwóch, a nadto zupełnie nie zależną od jakości i wielkości attrakcyj lokalnych. Że zaś wykonanie większéj ilo-

ści podobnych doświadczeń w różnych punktach ziemi doprowadziłoby nas do znajomości potencyjału grawitacyjnego i przybliżonéj gęstości w każdym punkcie uważanéj warstwy ziemi a to na podstawie twierdzeń Greena i Gaussa — już wyżéj nadmieniłem.

Dnia 14 maja 1884.